MA’RUZA

XOSMAS INTEGRALLAR VA ANIQ INTEGRALNI TAQRIBIY HISOBLASH

Mavzuning rejasi

1. Chegaralari cheksiz bo’lgan integrallar.
2. Uzluksiz funksiyaning integrali.
3. Xosmas integrallarni yaqinlashish belgilari.
4. To’g’ri to’rtburchaklar formulasi.
5. Trapesiyalar formulasi.
6. Parabolalar (Simpson) formulasi.

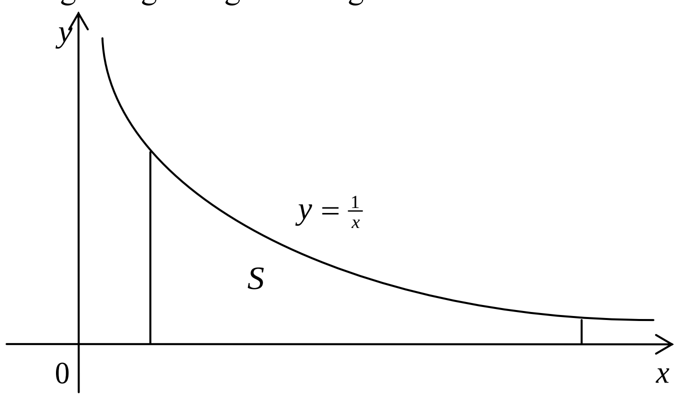
Tayanch so’z va iboralar: chekli, chegaralanmagan, 1-tur, 2-tur xosmas integral, uzilishga ega funksiya, yaqinlashuvchi integral, uzoqlashuvchi integral. Gauss egri chizig’i, yaqinlashish belgilari, funksiyaning nuqtadagi qiymati, integral yig’indi, to’rtburchaklar formulasi, argument orttirmasi, taqribiy ifoda, absolyut xato, trapesiyalar formulasi, qadam, Simpson formulasi, parabolik trapesiya.

Xosmas integrallar va ularning tiplari

Bizga ma’lumki $\int_a^b f(x)dx$ integralni ta’rifini berganda 1) integralni chegarasi chekli va 2) integral ostidagi funksiya uzluksiz, ya’ni chegaralangan deb faraz qilgan edik. Shuning uchun ham biz hozirgacha shu ikkita shartdan birortasi bajarilmay qolgan holdagi funksiya integrali haqida hyech narsa deya olmaymiz. Lekin quyidagi ba’zi bir qo’shimcha ma’lumotlar yordamida bunday integrallar haqida tushunchamizni kengaytirishimiz mumkin. Bundan yuqoridagi ikkita shartdan birortasi bajarilmasa, bunday integrallarga xosmas integrallar deb, agar 1) shart bajarilmasa chegaralari cheksiz bo’lgan integrallar kelib chiqadi va biz uni 1-tur xosmas integrallar deb ataymiz, agarda 2) shart bajarilmasa, ya’ni uzilishga ega funksiyani integrallashga 2-tur xosmas integrallar deb atab ularni o’rganishga kirishamiz. Shulardan dastlab chegaralari cheksiz bo’lgan integrallarni qaraymiz.

1. Chegaralari cheksiz bo’lgan integrallar

Dastlab shu ko’rinishdagi integrallarga keltirilgan misollarni ko’rib o’tamiz.



1-misol. $y=\frac{1}{x}$, $x \geq a > 0$ chiziqlar bilan chegaralangan S sohani yuzasini topaylik. Bizga ma’lumki, biz bilgan tushunchalar orqali bu sohani yuzasini topa olmaymiz. Lekin $x=b$ to’g’ri chiziq bilan egri chiziqli trapesiya hosil qilsak, bu egri chiziqli trapesiyaning yuzasi $\int_a^b \frac{dx}{x}$ ga teng bo'ladi. U holda $b \to \infty$ bo'lgandagi sohaning yuzasi hosil bo'ladi, ya'ni $S = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \ln\frac{a}{b} = \infty$. Demak, bu holda so'ralgan sohaning yuzasi haqida biror narsa ayta olmaymiz.

2-misol. $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x \geq a > 0$ chiziqlar bilan chegaralangan S sohaning yuzasini topamiz. 1-misoldagi kabi fikr yuritsak. $S = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b \dfrac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right)\Bigg|_a^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left(-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{1}{a}$ kelib chiqadi. Demak, bu sohaning yuzasi $\frac{1}{a}$ ga teng ekan, ya'ni sohamiz ko'rinishi cheksiz davom etishiga qaramay chekli yuzaga ega ekan. Bu misollardagi turli ko'rinishdagi natija $\dfrac{1}{x^2}$ ni $\dfrac{1}{x}$ ga nisbatan $x \to \infty$ da tezroq nolga intilgani tufaylidir. Yuqoridagi misollarni umumlashtirib $a \leq x < \infty$ sohada uzluksiz bo'lgan $y = f(x)$ funksiya integralini ko'ramiz.

1-ta'rif. Agar b ni cheksiz o'sishi natijasida $\int\limits_a^b f(x)dx$ integral aniq limitga intilsa, bu limitga yuqori chegarasi cheksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali deyiladi va $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ko'rinishda yoziladi. Uni hisoblash esa $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ bo'ladi. Bu holda xosmas integral yaqinlashuvchi yoki mavjud deyiladi. Agar limit mavjud bo'lmasa, yoki cheksiz bo'lsa, bu xosmas integralga majud emas yoki uzoqlashuvchi deyiladi. Demak, 1-misolimizdagi $\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x}$ xosmas integral uzoqlashuvchi, 2-misoldagi xosmas integral $\int\limits_a^{\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ ga esa yaqinlashuvchi bo'lar ekan. Xuddi shuningdek boshqa chegaralari cheksiz bo'lgan integrallar ham aniqlanadi va quyidagicha hisoblanadi.

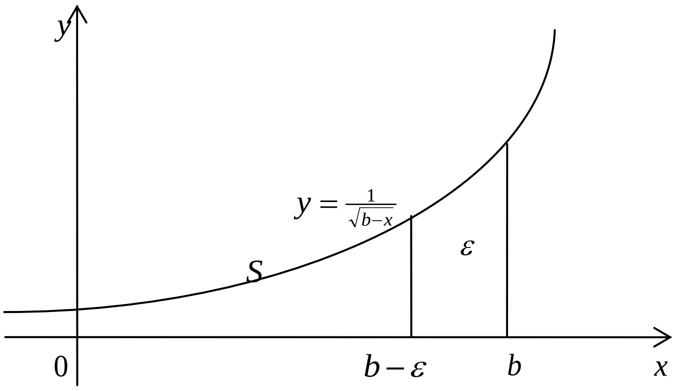
$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{va} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$$

O'ng tomonda turgan xosmas integrallarni har biri yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

2. Uzilishga ega funksiya integrali

Biz berilgan oraliqda uzilishga ega bo'lgan funksiyalardan olingan integrallarni quyidagi misollarda ko'rib chiqamiz.

1-misol. $y = \frac{1}{\sqrt{b-x}}$, $0 \leq x \leq b$ chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzasi S ni topaylik. Bu funksiya $x = b$ nuqtada aniqlangan.



Bu soha cheksiz davom etuvchi soha bo'lganligi uchun, bizga ma'lum bo'lgan usul bilan yuzani topa olmaymiz. Agar sohani $x=b-\varepsilon$ to'g'ri chiziq bilan kessak, hosil bo'gan egri chiziqli trapesiya yuzasi $S=\int_0^{b-\varepsilon} f(x)dx$ bo'lib, $\varepsilon\to 0$ da so'ralgan sohani yuzasini hosil qilamiz va

$$S=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{b-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{b-x}}dx=-\lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{b-x}\Big|_0^{b-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{b-b+\varepsilon}+2\sqrt{b}\right)=2\sqrt{b}$$

natijaga ega bo'lamiz. Bu hollarda aniq integral tushunchasini chegaralanmagan integral ostidagi funksiya tushunchasi bilan umumlashtirish mumkin bo'ladi. Shu sababli quyidagi ta'rifni keltiramiz.

2-ta'rif. Agar $\varepsilon\to 0$ da $\int_0^{b-\varepsilon} f(x)dx$ aniq integral chekli limitga intilsa, bu limitga uzilishga ega funksiyaning xosmas integrali deyiladi. Bu holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi. Agar bu limit mavjud bo'lmasa yoki chekli bo'lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi. Xuddi shuningdek, integral ostidagi fuknsiya $x=a$ nuqtada aniqlanmagan yoki $x=a$ da uzilishga ega bo'lsa $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ yoki $x=c$ da $c\in[a,b]$ uzilishga ega bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right)$$

formula yordamida tekshiriladi yoki hisoblanadi. Agar o'ng tomondagi har bir integral mavjud va chekli bo'lsa, oxirgi ko'rinishdagi xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

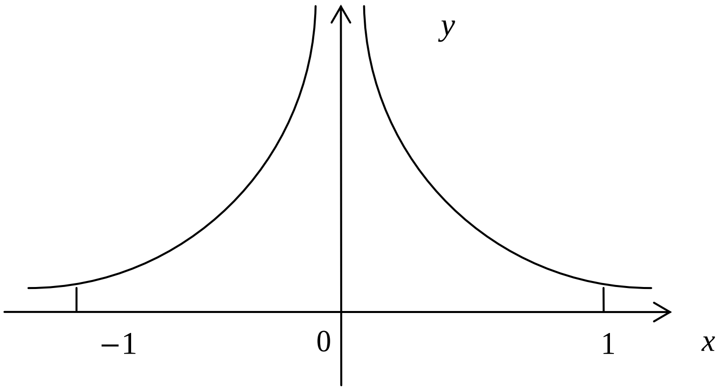
2-misol. $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ integralga Nyuton-Leybnis formulasini qo'llasak $I=-2$ hosil bo'ladi. Aslida, musbat funksiyaning integrali musbat son bo'lishi kerak. Bu yerdagi qarama-qarshilik uzoqlashuvchi bo'lgan xosmas integralga Nyuton-Leybnis formulasini to'g'ridan-to'g'ri qo'llash natijasida kelib chiqadi. Haqiqatan ham, $f(x)=\frac{1}{x^2}$ funksiya $x=0$ da cheksizlikka aylanadi. U holda

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to -0}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\eta\to +0}\int_{\eta}^{1}\frac{dx}{x^2},$$

$$\lim_{\varepsilon\to -0}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{\varepsilon\to -0}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon}=-\lim_{\varepsilon\to -0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{-1}\right)=\infty,$$

$$\lim_{\eta\to +0}\int\frac{dx}{x^2}=-\lim_{\eta\to +0}\frac{1}{x}\Big|_{\eta}^{1}=-\lim_{\eta\to +0}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)=\infty,$$

bo'lgani uchun xosmas integral uzoqlashuvchidir.



3-misol. Xuddi shunga o'xshash, $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}=6$ bo'lganligi uchun xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

3. Xosmas integralning yaqinlashishi belgilari

Ba'zi hollarda xosmas integralning aniq qiymatini hisoblash shart bo'lmay, uning yaqinlashishini bilish kifoya bo'ladi. Bu hollarda xosmas integrallarni yaqinlashishi (yoki uzoqlashishi) ma'lum bo'lgan xosmas integrallar bilan taqqoslash qulaydir. Shu maqsadda quyidagi xosmas integrallarni taqqoslashga asoslangan teoremani keltiramiz.

1-teorema. $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ intervalda uzluksiz va $0\le\varphi(x)\le f(x)$ shartni qanoatlantirsa.

a) agar $\int_a^{\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'lib,

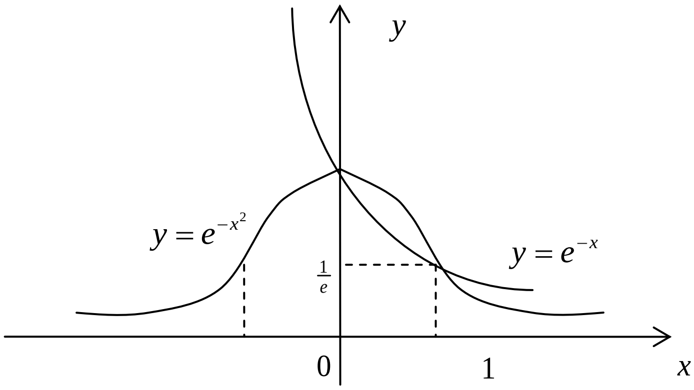
$$\int_a^{\infty} f(x)dx \ge \int_a^{\infty}\varphi(x)dx$$

bajariladi.

b) agar $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$ integral uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi. Bu teoremani isbotsiz qabul qilib, quyidagi misollarni ko'rib chiqamiz.

1-misol. $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ (Puasson integrali) ni tekshiring. Bu integralning ehtimollar nazariyasida ahamiyati juda katta. $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\int_0^{1} e^{-x^2}dx+\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$. Birinchi integral $\int_0^{1} e^{-x^2}dx$ da xosmaslik yo'q. $[0,1]$ da Gauss egri chizig'i bilan chegaralangan soha yuzini ifodalaydi, ya'ni aniq sondan iborat. $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ integralni qaraymiz. Ma'lumki, $0\le e^{-x^2}\le e^{-x}$, $x\ge 1$ da

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b} e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_1^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(\tfrac{1}{e^b}+e^{-1}\right)=\tfrac{1}{e}.$$



$\int\limits_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ yaqinlashuvchi bo'lganligidan yuqoridagi tengsizlikka asosan berilgan xosmas integral yaqinlashuvchidir.

2-misol. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ integralni tekshiring. Ma'lumki, $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ bo'lganligi uchun $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ xosmas integral yaqinlashuvchi ekanligidan, berilgan xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

3-ta'rif. $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi, agar $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$ uzoqlashuvchi bo'lib, $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, shartli yaqinlashuvchi bo'ladi.

2-teorema. Faraz qilaylik $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a,b]$ intervalda $0\le\varphi(x)\le f(x)$ tengsizlikni qanotlantirib, shu intervalda uzluksiz bo'lsin va $x=b$ nuqtada uzilishga ega bo'lsin. U holda a) agar $\int\limits_a^b f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ ham yaqinlashuvchi. b) $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ integral uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int\limits_a^b f(x)dx$ integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

3-misol. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 2-tip xosmas integralni tekshiring. $x=1$ da uzilishga ega $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ (chunki, $x^4 \le x,\ 1-x^4 \ge 1-x,\ x\in[0,1]$)

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{1-x}\Big|_{1-\varepsilon}^{0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2,$$

yaqinlashuvchi. U holda teorema shartiga asosan berilgan integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya ishorasini $[a,c]$ kesmada uzluksiz, $x=c$ nuqtada uzilishga ega bo'lsa va $\int\limits_a^c |f(x)|dx$ yaqinlashsa, unda $\int\limits_a^c f(x)dx$ ning ham yaqinlashishi kelib chiqadi.

Aniq integralni taqribiy hisoblash usullari

Aniq integralni hisoblash usullarini ko'rib chiqdik, lekin har qanday uzluksiz funksiyaning boshlang'ich funksiyasini chekli elementar funksiyalar yoradamida ifodalab bo'lmaydi. Shu sababli, ularni integrallarini Nyuton-Leybnis formulasidan foydalanib hisoblay olmaymiz. Bunday hollarda aniq integralni taqribiy hisoblash usullaridan foydalanamiz. Aniq integralni integral yig'indini limiti sifatidagi ta'rifidan va aniq integralning geometrik ma'nosidan kelib chiqqan bir nechta usullarini ko'rib chiqamiz.

4. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Ushbu $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralni hisoblash talab qilinsin. Hisoblash maqsadida $[a,b]$ kesmani $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n = b$ nuqtalar bilan n ta teng qismga bo'lamiz. Har bir bo'lakning uzunligi $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ bo'lib, $f(x)$ funksiyaning $x_0, x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n$ nuqtalardagi qiymatini $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ orqali ifodalaymiz, ya'ni $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_n = f(x_n)$ va quyidagi yig'indini tuzamiz:

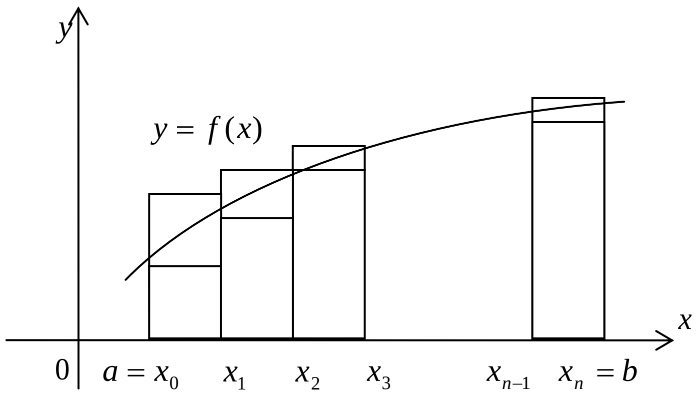
$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + ... + y_n\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} y_i\Delta x, \qquad y_1\Delta x + y_2\Delta x + ... + y_n\Delta x = \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta x$$

Bu yig'indilarning har biri $f(x)$ funksiya uchun integral yig'indi bo'ladi va shuning uchun $\int_a^b f(x)dx$ integralni taqribiy ifoda etadi.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_j + ... + y_{n-1}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \,,$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_j + ... + y_n\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

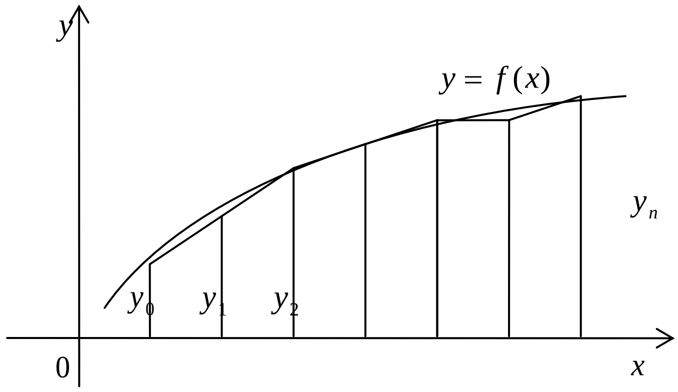
Bu formulalarni to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deyiladi.



Agar $f(x)$ musbat va o'suvchi funksiya bo'lsa, u holda (1) formula ichki to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onali figurani yuzini ifodalaydi, (2) formula esa tashqi to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onali figuraning yuzini ifodalaydi. Integralni to'g'ri to'rtburchaklar formulasi bilan hisoblashda qilingan xato n soni qancha katta bo'lsa, shuncha kichik bo'ladi. To'g'ri to'rtburchaklar formulasining absalyut xatosi $M_1 \frac{(b-a)^2}{4n}$ dan katta emas $M_1 - |f'(x)|$ ning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymatidir.

5. Trapesiyalar formulasi

$[a,b]$ kesmani bo'lishni yuqoridagidek qoldirib, Δx ga mos keluvchi $y = f(x)$ chiziqning har bir yoyini bu yoyning chetki nuqtalarini tutashtiruvchi vatar bilan almashtiramiz. Bu berilgan egri chiziqli trapesiyani n ta to'g'ri chiziqli trapesiyalar yuzalarning yig'indisi bilan almashtirilganligini bildiradi.



Bunday figuraning yuzi egri chiziqli trapesiyani yuzini to’g’ri to’rtburchaklardan tuzilgan pog’onali figuraning yuziga qaraganda ancha aniq ifodani geometrik jihatdan ravshandir. Bu trapesiyalardan birinchisining yuzi $\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x$, ikkinchisining yuzi $\frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x$ va hokazo bo’lganligi sababli

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + ... + \frac{y_{i-1} + y_i}{2}\Delta x + ... + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x \right) =$$

$= \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right)\Delta x$ va $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ekanligidan

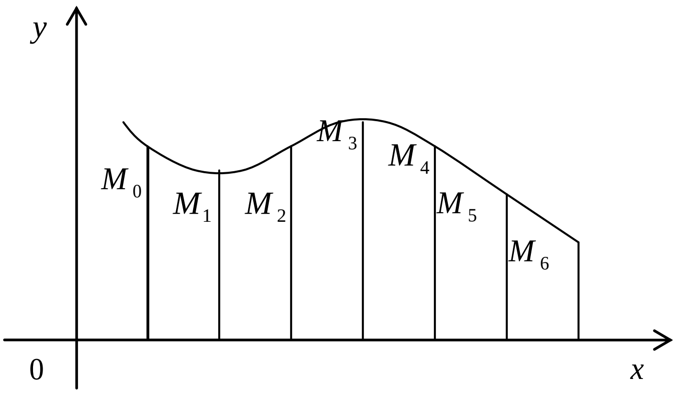
$$\int_a^b f(x)dx \approx \tfrac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right).$$

Bunga aniq integralni trapesiyalar formulasi bilan taqribiy hisoblash formulasi deyiladi. n soni qancha katta bo’lsa va $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ qadam kichik bo’lib, (3) taqribiy hisoblash aniqlik bilan integralni qiymati topiladi. Trapesiyalar formulasini absolyut xatosi $M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$ dan katta emas, bunda $M_2 - |f'(x)|$ ning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

6. Parabolalar (Simpson) formulasi

$[a,b]$ kesmani $n = 2m$ ta juft miqdordagi teng qismlarga bo’lamiz. $[x_0, x_1]$ va $[x_1, x_2]$ kesmalarga mos va berilgan $y = f(x)$ egri chiziq bilan chegaralagan egri chiziqli trapesiyani yuzin $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ uchta nuqtadan o’tuvchi va simmetriya o’qi OY o’qqa parallel bo’lgan ikkinchi darajali parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiyaning yuzi bilan almashtiriamiz.

Bunday egri chiziqli trapesiyani parabolik trapesiya deyiladi. O’qi OY o’qqa parallel parabolani tenglamasi $y = Ax^2 + Bx + C$ ko’rinishda bo’ladi. A, B, C koeffisiyentlar, parabolasi berilgan uch nuqta orqali o’tish shartidan bir qiymatli ravishda aniqlanadi. Shunga o’xshash parabolalarni kesmlarini boshqa juftlari uchun ham yasaymiz. Shunday yasalgan parabolik trapesiyalar yuzlarini yig’indisi integralning taqribiy qiymatini beradi. Dastlab bitta parabolik trapesiyaning yuzini hisoblaymiz. Buning uchun quyidagi lemmani keltiramiz.



Lemma: Agar egri chiziqli trapesiya $y = Ax^2 + Bx + C$ parabla OX o'q va oralig'i $2h$ ga teng bo'lgan 2 ta ordinata bilan chegaralangan bo'lsa, u holda uning yuzi $S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ ga teng.

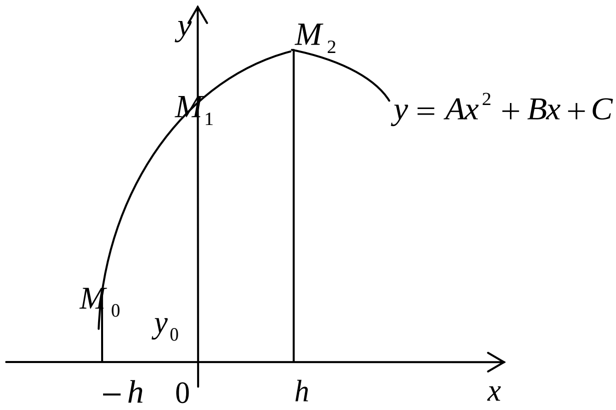
Isboti: A, B, C koeffisiyentlar quyidagi tenglamalardan aniqlanadi.

$$\begin{cases} \text{Agar } x_0 = -h \text{ bo'lsa, u holda } y = Ah^2 - Bh + C. \\ \text{Agar } x_1 = 0 \text{ bo'lsa } y_1 = C. \\ \text{Agar } x_2 = h \text{ bo'lsa } y = Ah^2 + Bh + C. \end{cases}$$

Buni yechib $A = \frac{1}{2h^2}(y_0 + 2y_1 + y_2)$, $C = y_1$, $B = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0)$ topamiz. Endi parabolik trapesiya yuzini aniq integral yordamida hisoblasak,

$$S = \int_{-h}^{h}\left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right)\Big|_{-h}^{h} = \frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right)$$

Lekin, $2Ah^2 + 6C = y_0 + 4y_1 + y_2$. Demak, $S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ Bundan foydalanib, quyidagi taqribiy tengliklarni yozamiz $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$, $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$, ...,



$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}\right).$$

Bularni qo'yib, izlanayotgan integrallarni taqribiy qiymatini beruvchi ifodani hosil qilamiz.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\left(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}\right)\right)$$

bunda $h = \frac{b-a}{2m}$. Bu Simpson formulasidir. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada 4-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda Simpson formulasining absolyut xatosi $M_4 \frac{(b-a)^4}{2880n^4}$ dan katta bo'lmaydi, bunda $M_4 - \left|f^{IV}(x)\right|$ ning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

misol. Ushbu $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ integralni taqribiy hisoblang.

Yechish: Avval berilgan integralning aniq qiymatlarini Nyuton-Leybnis formulasi bo'yicha hisoblaymiz. $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2=0{,}69315.$

$[0,1]$ kesmani $n=10$ ta teng bo'lakka bo'lamiz. $\Delta x=\frac{1-0}{10}=0{,}1$ quyidagi jadvalni tuzamiz

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	0,90909	0,83333	0,76923	0,71429	0,66667
i	0	6	7	8	9	10
x_i	0	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	1	0,625	0,58824	0,55556	0,52632	0,5

(1) formula bo'yicha

$$I=0{,}1\cdot(1+0{,}90909+0{,}83333+0{,}76923+0{,}71429+0{,}66667+$$
$$+0{,}625+0{,}58824+0{,}55556+0{,}52632)=0{,}1\cdot 7{,}18773=0{,}71877.$$

(2) formula bo'yicha

$$I\approx 0{,}1\cdot(0{,}90909+0{,}83333+0{,}76923+0{,}71429+0{,}66667+0{,}625+$$
$$+0{,}58824+0{,}55556+0{,}52632+0{,}5)=0{,}1\cdot 6{,}68773=0{,}66877.$$

hosil qilingan natijaning xatosini baholaymiz

$f(x)=\frac{1}{1+x}$, $f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $[0,1]$ kesmada $|f(x)|\le 1$. Shuning uchun $M_1=1$. U holda hosil qilingan natijaning xatosi $M_1\cdot\frac{(b-a)^2}{4n}=\frac{1}{40}=0{,}025$ kattalikdan ortmaydi. $|0{,}39315-0{,}66877|=0{,}02438<0{,}025$

2) Trapesiyalardan foydalanib quyidagi natijani topamiz.

$$I=0{,}1\cdot\left(\tfrac{1+0{,}5}{2}+0{,}90909+0{,}83333+...+0{,}52632\right)=0{,}69377.$$

Hosil qilingan natijaning xatosini baholaymiz $f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$, $[0,1]$ kesmada $|f''(x)|\le 2$. Demak, $M_2=2$, $M_2\cdot\frac{(b-a)^2}{12n^2}=\frac{2}{12\cdot 100}=\frac{1}{600}=0{,}001667$ bo'ladi.

3) Simpson formulasidan foydalanib, topamiz $n=2m=10$, $\frac{b-a}{3n}\,\frac{1}{30}$ (6) formulaga asosan.

$$I=\tfrac{1}{30}\cdot\big(1+0{,}5+4(0{,}90909+0{,}76923+0{,}66667+0{,}58824+0{,}52632)+$$
$$+2(0{,}83333+0{,}71429+0{,}625+0{,}55556)\big)=\tfrac{1}{30}\cdot(1{,}5+4\cdot 3{,}45955+$$
$$+2\cdot 2{,}72818)=0{,}693146.$$

Hosil qilingan natijani xatosini baholaymiz $f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$, $f'''(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}$,

$f^{IV}(x)=\frac{24}{(1+x)^5}$, $[0,1]$ kesmada $|f^{IV}(x)|\le 24$. Shuning uchun $M_4=24$. U holda olingan natijaning xatosi $M_4\frac{(b-a)^3}{2880\cdot 10^4}=\frac{24}{2880\cdot 10000}=0{,}000004<0{,}000008.$

Uchala natijani aniq qiymat bilan taqqoslaganda Simpson formulasi qolgan ikkita formuladan ancha aniq ekan degan xulosaga kelamiz.